一種新的圖論模型應用於配電系統之饋線重構

Shih-Zhang Li
資訊網路工程系
龍華科技大學
kk761003@hotmail.com.tw

Han-Lin Shih
資訊網路工程系
龍華科技大學
e994341026@gm.lhu.edu.tw

Rueiher Tsaur*
資訊網路工程系
龍華科技大學
rueiher@mail.lhu.edu.tw
*:Corresponding author

摘要

饋線重構是配電管理系統中用以處理問題的一項重要技術，其主要的功用是在滿足輻射狀配電架構、電壓與電流等限制條件的前提下，於正常運行情況，一方面平衡饋線負載、消除過載，提高供電電壓品質，另一方面，降低線路損失，提高系統經濟性；在緊急情況下，隔離故障，縮小停電範圍，並在故障排除後，迅速恢復供電。本方法目的為能夠於電網系統中，單獨分離出數個獨立系統，即數學圖論中的樹狀結構，因樹狀結構沒有迴圈的產生且樹跟樹之間彼此並不連通，當其中一個樹的節點發生故障導致斷路時，其它棵樹的功能並不受到影響，利用這個性質來達到中間工作站損壞時，不會影響到另一系統。

關鍵詞：配電系統，饋線重構，樹，圖形。

Abstract

Feeder reconfiguration is important in Distribution Management System. During normal distribution system operation, by changing the on/off statuses of switches, the feeder reconfiguration can reduce the system loss or improve the system reliability. As the status of switch changes, the resulting topology of the distribution system is maintained as a radial structure, thus the system constraints such as feeder loading and voltage profile should not be violated after reconfiguration. In [2], an effective CSS algorithm with real number strings is proposed to provide a switching operation strategy in order to solve the distribution system real power losses minimization problems, where coding and decoding schemes are proposed in order to avoid generating invalid solutions as well as improve the search efficiency. Our objective in this paper is to introduce a notion of graph partition technique to (partially) provide a mathematically foundation of Chu and Tsai's work.

Keywords: graphs, feeder reconfiguration, power systems, trees.

1. 緒論

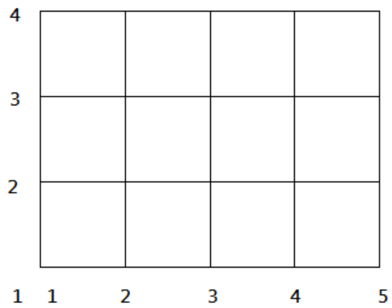
所謂的圖，是表示物件與物件之間的關係方法，是圖論的基本研究對象；一個圖是由一些小圓點(稱為頂點、節點或點)和連結這些點的直線或曲線(稱為邊)所組成。

給定一個圖 G，G 上每個點有不同的權重分配。於圖形 G 上指定若干參考點(起始點)，並給予不同的權重，其權重大於 G 圖上所有點的權重:這些參考點彼此間並不相連。本程序之目的在於給予 G 上所有點新的權重及聯通結構，其規則如下:令 v 為 G 上任意一點，若 v' 為 v 的鄰居(即$v' \in \mathrm{N}(v)$)且 v'的權重大於 N(v)中所有點的權重，則 v 的權重會被設定為 v'的權重且 v 與 v'連通(即$(v, v') \in \mathrm{E(G)}$)。

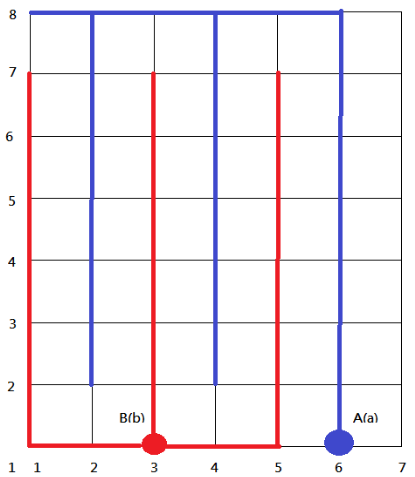
本篇論文目的為證明所有格子圖皆可被分割為若干棵樹，其樹的根節點為指定的參考點。

2. 方法

所謂的格子圖(Grid Graphs)$G_{m,n}$，乃一個二維$m \times n$的曲線圖，其頂點在平面上的各點對應於與整數坐標，x 坐標是在範圍 1 至 m，y 座標是在範圍 1 至 n，任兩點相鄰若且為若相對座標距離為 1，以下的圖即為一個5×4的格子圖$G_{5,4}$。



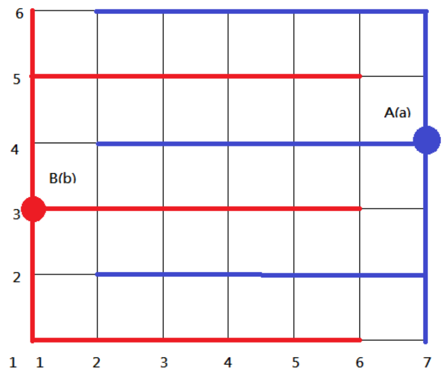
Theorem. 1 (若爾當曲線定理，Jordan curve theorem): 每一個平面上的非自交環路(又稱為若爾當曲線)，都把平面分成一個「內部」區域和一個「外部」區域，且任何從一個區域到另一個區域的道路都必然在某處與環路相交。



在以下的證明中我們將首先證明任意格子圖可被拆解成兩棵樹。該兩棵樹的根節點 A 與 B 其權重被分別指定為 **a** 與 **b**。很明顯地指定參考點 A 與 B 無法被任意指定，若是 A 與 B 在同一列上且 A 與 B 皆未在格子圖邊緣上，假設 A 點位於 B 點的右側，如下圖所示。則 A 點的右側或是 B 的左側會有其他點的存在，因為不能有迴圈的產生，所以有部分 A 右側的點其權重必須被指定為 **b**，或是部分 B 右側的點其權重必須被指定為 **a**。依據若爾當曲線定理(Jordan curve theorem)，則 A 樹或 B 樹其中一棵樹必定會拆成不連通的兩部分。因此為了方便起見，我們可以指定 A 與 B 位於格子圖的邊緣且 A 與 B 不能位於同一邊上。

Theorem. 2: 任意格子圖$G_{m,n}$可被拆解成兩棵樹其樹的根節點為指定的參考點(m,n 大於 4)。

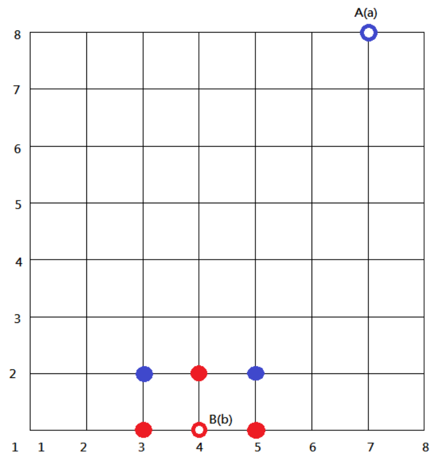
目的:(起始狀態)在格子圖上每個點有不同的權重分配，權重最大的兩個點分別指定為 A 其權重值為 **a**、B 其權重值為 **b**，其中 **a** 值小於 **b** 值，分別位於格子圖的邊緣。(過程)A、B 點的權重值不變，權重低的點會被權重高的點覆寫，由權重低的點(A)開始指定其他點新的權重值 **a** 或 **b**，有順序的將圖形中的點利用權重大小進行分割(partition)，當點 v 被指定時，會依鄰居 N(v)\v 目前權重最高的數值而被覆寫。(結束狀態)最後由權重一樣的所有點組成數棵樹。如圖即可分離出由 A 當 ROOT 及 B 當 ROOT 的兩棵樹。Theorem. 2 將由以下諸 Lemma 來證明。



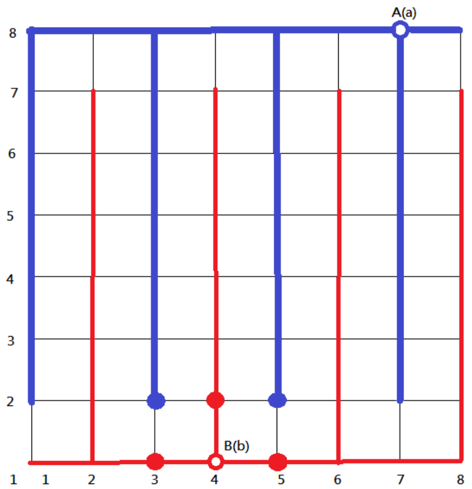
Lemma. 1:任意格子圖$G_{m,n}$可被拆解成兩棵樹其樹的根節點為指定的參考點，其參考點同時位於列或行上。

證明:本 Lemma 的證明可分為兩部分，分別為 A,B 同時位於列或分別位於行上。當 A,B 同時位於行上時，很明顯地，可藉由轉動格子圖，使行列互換，因此我們只須證明 A,B 同時位於列上即可。

當 A,B 同時位於列上，A 位於結束列，B 位於起始列。假設 A 座標為(l,n)，B 座標為(k,1)，$1 \leq l,k \leq m$。由於點的權重會依其鄰居的權重而受影響，若由權重大者(B)開始指定點的權重，則會覆蓋權重小的點，所以由權重小者(A)開始分割。因 B 的權重較高，且 B 的鄰居一定會被指定 B 的權重，在 B 所處的c_4裡，已有 3 個點權重相同，因此 B 鄰居的共同鄰居一定要設定 A 的權重，才不會有迴圈產生。



因為 A 位於結束列，故指定 A 點所在的列，$(i,n), 1 \le i \le m$，上的所有點其權重為 **a**。再由 B 鄰居的共同鄰居點 $(k+1,2)$，$(k-1,2)$，如果點存在的話，及所在行 $(k+1,j)$，$(k-1,j)$，$2 \le j \le n$，指定權重為 **a**。最後指定 $(k+(2s+1),j)$，$2 \le j \le n$，其權重為 **a**，其中 s 滿足 $\frac{-k}{2} \le s \le \frac{m-k-1}{2}$，$s \in$整數。指定完後，圖 $G_{m,n}$ 中剩下的點其權重值指定為 **b**。例如下圖所示為 $G_{8,8}$ 的結果。



由上圖 $G_{8,8}$ 即可清楚的看出，分離出以 A 做 ROOT 的樹。同時我們可以輕易地看出來，只要 A 點設定在樹上的任意節點，最後的結果亦將相同。

Lemma. 2:任意格子圖 $G_{m,n}$ 可被拆解成兩棵樹其樹的根節點為指定的參考點，其參考點各分別位於列及行上。

證明: 我們只需證明當 B 位於起始列 A 位於起始行，或 B 位於起始列 A 位於結束行兩種情形即可。這是因為其他情形，可藉由轉動格子圖，使行列互換，而證明求得。

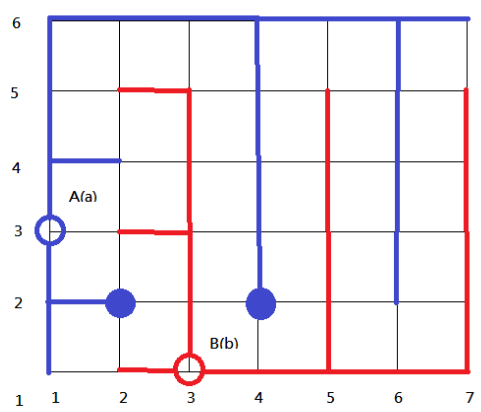
以下先證明 **B 位於起始列 A 位於起始行**情形。因為 A 位於起始行，因 A 的行座標一定為奇數(事實上為 1)，而 B 的行座標則分為偶數與奇數兩種情形。當 B 的行座標為偶數時，其證明與 Lemma. 1 雷同；當 B 的行座標為奇數時，其證明如下:

情形 1:當 n 為偶數時

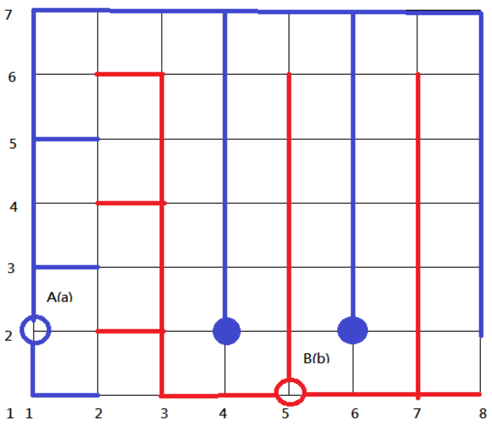
首先指定 A 點所在的行，$(1,j), 1 \le j \le n$，上的所有點其權重為 **a**。再由 B 鄰居的共同鄰居點 $(k+1,2)$，$(k-1,2)$ 其中 $k \ge 3$，如果點存在的話，指定權重為 **a**。

當 $k \ne 3$ 時，指定 $(k+2s-1,j)$ 權重為 **a**，其中 s 滿足 $\frac{5-k}{2} \le s \le \frac{m-k+1}{2}$，$s \in$整數。另外指定 (i,n) 權重為 **a**，$1 \le i \le m$。最後指定 $(2,j)$，$1 \le j \le n$，$j \in$偶數，權重為 **a**。指定完後，圖 $G_{m,n}$ 中剩下的點其權重值指定為 **b**。

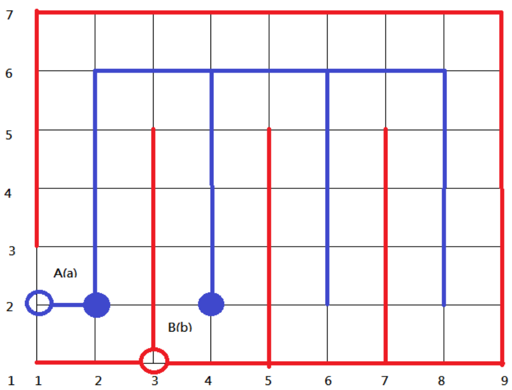
當 $k=3$ 時，$(k-1,j)$，$2 \le j \le n$，$j \in$偶數，指定權重為 **a**。另外指定 (i,n) 權重為 **a**，$1 \le i \le m$。最後指定 $(k+(2s+1),j)$，$2 \le j \le n$，其權重為 **a**，其中 s 滿足 $\frac{3-k}{2} \le s \le \frac{m-k-1}{2}$，$s \in$整數。指定完後，圖 $G_{m,n}$ 中剩下的點其權重值指定為 **b**。例如下圖所示為 $G_{7,6}$ 且 $k=3$ 的結果。



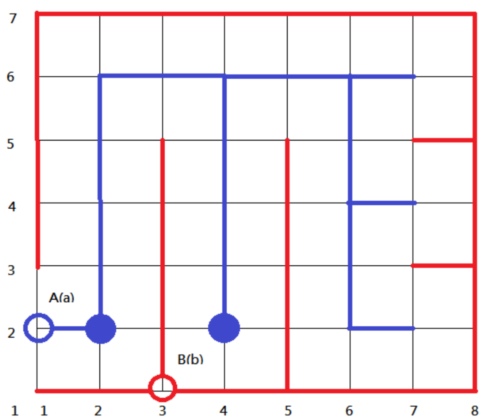
情形 2:當 n 為奇數且 $k \ne 3$ 時，其證明方法相似於上述情形 1 中(即 n 為偶數)$k=3$ 時的證明，唯有第二行之點 $(2,j)$，$1 \le j \le n-1$，$j \in$奇數，其指定值 **a**,**b** 互換，如下圖所示。



當 *n* 為奇數且$k=3$**時**，首先讓我們考慮 *m* 為奇數的情形：指定$(k+(2s+1),j)$，$2\le j\le n-1$，其權重為 **a**，其中 *s* 滿足 $\frac{-k}{2}\le s\le\frac{m-k-1}{2}$，$s\in$整數。再指定$(k+2s,n-1)$，其權重為 **a**，其中 *s* 滿足 $\frac{2-k}{2}\le s\le\frac{m-k}{2}$，$s\in$整數。例圖如下。



接下來讓我們考慮 *m* 為偶數情形，其做法相似於上述 *m* 為奇數情形，除了第$m-1$行外，$m-1$指定方式如下：指定點$(m-1,j)$，$j\in$偶數，其權重為 **a**；行中其餘點權重為 **b**。例圖如下。



以下證明 **B 位於起始列 A 位於結束行**情形。因為 A 位於結束行，固 A 的行座標有偶數及奇數的可能，而 B 的行座標也有偶數與奇數兩種可能。若 A 與 B 的行座標為一奇一偶時，其證明與 Lemma. 1 雷同；當 A 與 B 的行座標同為奇數或偶數時，其證明如下:

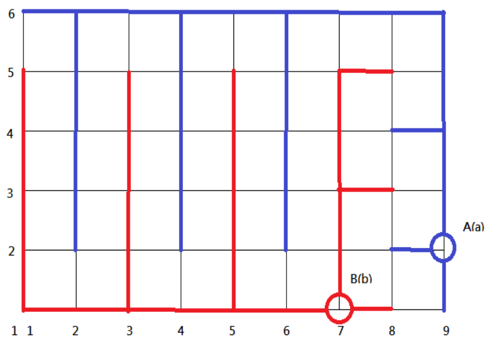
情形 1:當 n 為偶數時

首先指定 A 點所在的行，$(m,j),1\le j\le n$，上的所有點其權重為 **a**。再由 B 鄰居的共同鄰居點$(k+1,2)$，$(k-1,2)$其中$k\le m-2$，如果點存在的話，指定權重為 **a**。

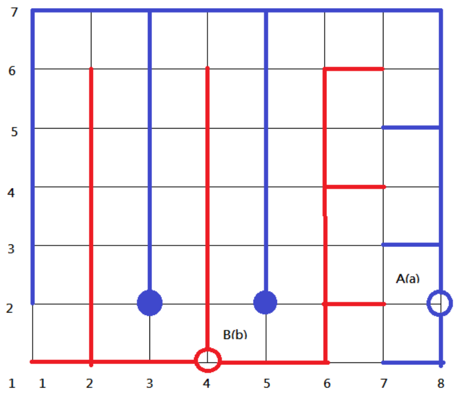
當$k=m-2$時，$(k+1,j)$，$1\le j\le n$，$j\in$偶數，$(k-(2s+1),j)$，$2\le j\le n$，指定權重為 **a**，其中 *s* 滿足$\frac{-k}{2}\le s\le\frac{m-k-1}{2}$，$s\in$整數。指定權重為 **a**。最後將點$(i,n),1\le i\le m$指定權重為 **a**。指定完後，圖$G_{m,n}$中剩下的點其權重值指定為 **b**。

當$k\ne m-2$時，指定$(k+(2s+1),j)$，$2\le j\le n$，指定權重為 **a**，其中 *s* 滿足 $\frac{-k}{2}\le s\le\frac{m-k-3}{2}$，$s\in$整數。再將點$(i,n),1\le i\le m$指定權重為 **a**。最後將點$(m-1,j)$，$2\le j\le n$，$j\in$偶數，指定權重為 **a**。

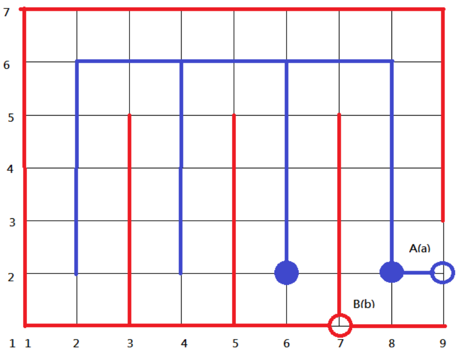
指定完後，圖$G_{m,n}$中剩下的點其權重值指定為 **b**。例如下圖所示為$G_{9,6}$且$k=7$的結果。



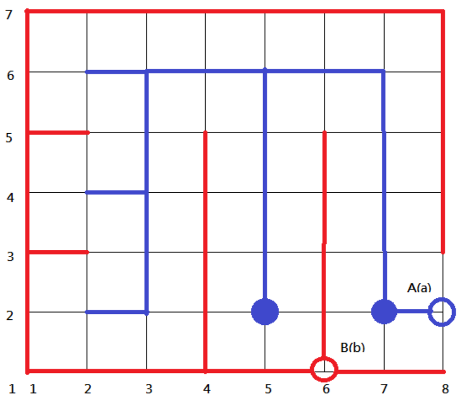
情形 2:當 n 為奇數且$k\ne m-2$**時**，其證明方法相似於上述情形 1 中(即 *n* 為偶數)$k=m-2$時的證明，唯有第$m-1$行之點$(m-1,j)$，$1\le j\le n-1$，$j\in$奇數，其指定值 **a**,**b** 互換，如下圖所示。



當 n 為奇數且$k=m-2$時，首先讓我們考慮 m 為奇數的情形：指定$(k+(2s+1),j)$，$2\le j\le n-1$，其權重為 **a**，其中 s 滿足 $\frac{-k}{2}\le s\le\frac{m-k-2}{2}$，$s\in$ 整數。再指定$(k+2s,n-1)$，其權重為 **a**，其中 s 滿足 $\frac{2-k}{2}\le s\le\frac{m-k-2}{2}$，$s\in$整數。例圖如下。



接下來讓我們考慮 m 為偶數情形，其做法相似於上述 m 為奇數情形，除了第 2 行外，第 2 行指定方式如下：指定點$(2,j)$，$j\in$偶數，其權重為 **a**；行中其餘點權重為 **b**。例圖如下。

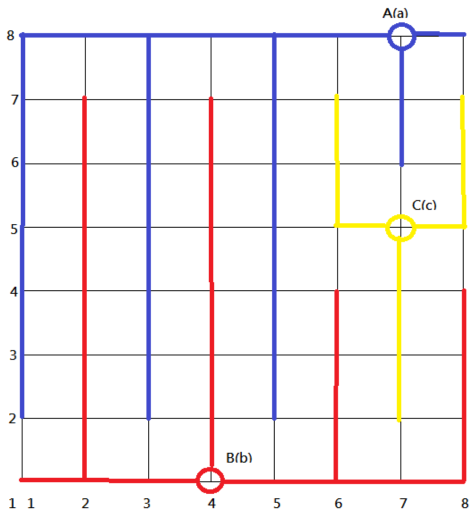


Theorem. 3: 任意格子圖$G_{m,n}$可被拆解成數棵樹其樹的根節點為指定的參考點(m,n 大於 4)。

若依 Theorem. 2 已將格子圖分界成兩棵樹，則加入第三參考點時分為兩種情形，即第三參考點之權重小於前兩參考點權重，及第三參考點權重不小於前兩參考點權重，以下先考慮情形 1。

情形 1:第三參考點權重小於前兩參考點權重，假設第三參考點 C 其權重為 **c**，即$b>a>c$，則依其放置位子座標(t,u)之後，原本該設定權重 **a** 及 **b** 的點指定為權重 **c**，在依 Theorem. 2 進行拓展，最後則生成一顆權重為 **c** 的新樹。

情形 2: 第三參考點權重不小於前兩參考點權重，若 **c** 權重介於 **a,b** 之間即$b>c>a$則 C 點取代 A 點的位子，使得 A 點變成第三參考點，再由上述情形 1 進行拓展。若 **c** 權重大於 **a,b** 即$c>b>a$，則 C 點取代 B 點，B 點取代 A 點，使得 A 點變成第三參考點，再由上述情形 1 進行拓展。下圖即為 **c** 點小於 **a,b** 情形。



3. 結論

目前樹狀結構被廣泛應用於計算機科學及資料結構中，在未來我們希望本方法能應用於網際網路中，將一個廣域網路分離出數個獨立系統，使網路節點發生故障時，其它系統可以不受影響而繼續運作，達成以下的目的:

1. 找出特定的圖形結構，使得該圖形結構能夠滿足 Theorem. 3 的敘述(在此情形下格子圖將是此特定圖形結構的特殊狀況) 。
2. 針對指定格子圖，制定一套演算法，以找出該圖上所有樹狀結構的可能，同時針對任一樹狀結構，找出其最佳演算法。
3. 且讓應用範圍更為廣泛，如網路拓

樸，排水系統，交通系統等等。

參考文獻

[1]C. C. Chu, C. Y. Lee, and M. S. Tsai . "Applications of Hybrid GA-ACO on Feeder Reconfiguration for Distribution System Scheduled Maintenance Outage under Load Variations". **The third international conference on advanced power system automation and protection**, October18~21, 2009, Jeju, Korea.

[2]C. C. Chu and M. S. Tsai. "Network Reconfiguration of Distribution System Using Charged Charged System Search With Real Strings". **Submitted for publication**.

[3]T.C. Hales, "The Jordan curve theorem, formally and informally". **American Mathematically Monthly** 114, 2007, pp. 882-894.

[4]B. Li and M. Toulouse, "Maximum Leaf Spanning Tree Problem for Grid Graphs". **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, Vol. 73, 2010, pp. 181-194.

[5]Mordecai J. Golin, Xuerong Yong, Yajun Wang, Yiu Cho Leung. "Counting Structures in Grid Graphs, Cylinders and Tori Using Transfer Matrices: Survey and New Results". **Proceedings of the Seventh Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the Second Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics,** 2005, pp. 250-258.